UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2009

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per gli scorsi anni, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE

Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte esatte vanno attribuiti **5 punti**, alle risposte non date (bianche) va attribuito **1 punto**, alle risposte errate vanno attribuiti **0 punti**.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B	E	C	D	C	B	B	C	A	C	D	D	373	27

SECONDA PARTE

Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi tre problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 10.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 10 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 15

Ovviamente si assegnino 10 punti per la soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta. Per soluzioni parziali si seguano queste indicazioni:

- **3 punti** a chi afferma che $q^2 - 1$ multiplo di p o equivalenti o simmetriche;
- **2 punti** a chi deduce $p|q+1 \vee p|q-1$

A questo punto la soluzione si può articolare in due diversi modi; o si conclude con delle disuguaglianze, altrimenti si conclude impostando i vari sistemi dati dalle divisibilità.
(a) punteggi parziali per soluzione con il sistema:

- **1 punto** a chi scrive il sistema "generico" $p = aq + k$, $q = bp \pm h$, dove h, k possono essere solo ± 1
- **1 punto** a chi risolve il sistema $(h, k) = (1, 1)$
- **1 punto** a chi risolve il sistema $(h, k) = (1, -1)$ o $(h, k) = (-1, 1)$
- **2 punti** a chi risolve il sistema $(h, k) = (-1, -1)$

(b) punteggi parziali per soluzione con disuguaglianze:

- **2 punti** per chi deduce $p \leq q + 1$ **E** $q \leq p + 1$, **1 punto** se ce n'è solo una

Ovviamente il punteggio accumulato in (a) e quello accumulato in (b) non sono sommabili. Se il candidato non rientra in nessuno dei casi precedenti ma nonostante ciò scrive almeno una delle 2 soluzioni (verificandola), gli verrà assegnato **1 punto**.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 16

Come sempre, qualunque dimostrazione completa vale **10 punti**, anche se diversa da quella ufficiale (ad esempio, fatta usando la geometria analitica o la trigonometria); però l'impostazione di calcoli analitici o trigonometrici che non portino alla tesi né a nessuno dei passi intermedi sotto riportati vale **0 punti**. Chi dimostrasse correttamente la seconda parte (o qualche passo intermedio di essa) assumendo per vera la prima senza dimostrarla ha diritto ai punti che vale ciò che ha dimostrato.

Analogamente, vale **0 punti** l'osservazione di proprietà della configurazione che non servano alla dimostrazione, come ad esempio il fatto che il punto M si debba trovare sulla circonferenza passante per A, C e per il circocentro del triangolo ABC o la dimostrazione dell'esistenza di un punto N che soddisfi le ipotesi.

Infine, valgono **0 punti** le dimostrazioni riguardanti casi particolari come quello in cui ABC è equilatero o la scelta di specifici punti M e N, o casi degeneri come quello in cui ABC è rettangolo (peraltro esplicitamente esclusi dal testo).

La prima parte dell'esercizio vale **4 punti**. Punteggi parziali possono essere assegnati per l'ottenimento di alcune delle uguaglianze tra angoli necessarie per la dimostrazione.

La dimostrazione che MNP è isoscele vale **2 punti**.

La dimostrazione della similitudine dei triangoli BCP e ABN vale **1 punto**; la dimostrazione della loro congruenza **2 punti** (comprensivi del punto per la similitudine).

L'osservazione che giacché il triangolo MNP è isoscele vale anche $MN = MP$ può essere fatta indipendentemente dalle considerazioni sui triangoli BCP e ABN e vale **1 punto**.

Infine l'osservazione che allora la tesi equivale a dimostrare che $CP = AM$ e che questo è vero per la congruenza di BCP e ABN vale **1 punto**.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 17

Proponiamo una scala di punteggio in caso la soluzione del candidato segua le idee della soluzione proposta. Lasciamo al docente il compito di giudicare eventuali soluzioni sostanzialmente diverse da quella proposta, tenendo presente che una soluzione logicamente corretta e completamente giustificata vale in ogni caso 10 punti. Alcune delle affermazioni seguenti possono essere dimostrate indipendentemente dalle altre. I punteggi proposti si riferiscono a ciascuna singola parte e nel caso di soluzioni parziali dovranno essere cumulati per ottenere la valutazione finale.

Per chi segue una strada simile alla soluzione proposta, o svolge solo parzialmente l'esercizio si assegnino:

1 punto per chi osserva che è sufficiente considerare i resti della divisione dei numeri per tre e non i numeri stessi (proprietà i)).

2 punti per chi dimostra che il resto della divisione per tre dei primi tre elementi di un'ordinamento *buono* è, nell'ordine, lo stesso degli ultimi tre (proprietà ii))

3 punti per chi dimostra che i primi tre elementi di un ordinamento *buono* devono essere necessariamente avere tre resti diversi se divisi per tre (proprietà iii))

3 punti per chi dimostra che il quarto elemento di un'ordinamento *buono* deve necessariamente essere un multiplo di tre. (proprietà iv))

1 punto per lo svolgimento corretto del calcolo finale.

1. La risposta è **(B)**. 16 coni stradali individuano 15 segmenti lunghi 10 metri, per un totale di 150 metri di linea, e per dipingerla è necessaria una volta e mezza la vernice rispetto ai 6 litri dei 100 metri, ossia 9 litri.

2. La risposta è **(E)**. L'area che stiamo cercando è uguale all'area del triangolo ABC al quale abbiamo sottratto i tre triangoli più piccoli che partono dai vertici di ABC. Questi triangoli sono anche essi equilateri (sono omomorfi ad ABC) e tutti congruenti. Notiamo inoltre che ABC e DEF sono congruenti. Consideriamo ad esempio il triangolino di vertice in A: la sua altezza è uguale alla distanza di A dal lato parallelo a BC del triangolo DEF. Per costruzione, AO è il doppio di questa distanza e, per proprietà della mediana di un triangolo, $AO = OD$ è $\dfrac{2}{3}$ dell'altezza del triangolo DEF (e quindi di ABC). Essendo il triangolino omomorfo ad ABC e con altezza $\dfrac{1}{3}$ di quella di ABC, la sua area sarà $\dfrac{1}{9}$ di quella di ABC. L'area dei tre triangolini sarà dunque $\frac{1}{3}$ di quella di ABC e l'area che stavamo cercando è $\dfrac{2}{3}$.

3. La risposta è **(C)**. Le quattro affermazioni sono equivalenti a:
   A: "C'è almeno un furfante tra noi.
   B: "Ci sono almeno due furfanti tra noi.
   C: "Ci sono almeno tre furfanti tra noi.
   D: "Ci sono almeno quattro furfanti tra noi.
   Se ci sono x furfanti, tutte e sole le prime x affermazioni sono vere, dunque ci sono x cavalieri. Dato che furfanti e cavalieri sono nello stesso numero e in tutto devono essere quattro, avremo due cavalieri e due furfanti.

4. La risposta è **(D)**. Intuitivamente, le posizioni delle carte rimanenti sono equiprobabili, quindi è più probabile che il 7 di denari finisca a Duccio "perché ha più spazio libero". Più formalmente: contiamo i modi di distribuire 34 carte tra 4 persone, in modo che uno ne riceva 10, uno 9, uno 8 e uno 7: possiamo distribuire ordinatamente 34 carte in 34! modi diversi, ma ognuno di questi viene contato tante volte quante sono i possibili modi di ordinare separatamente 10, 9, 8 e 7 carte, cioè 10!9!8!7! (la formula è la stessa degli anagrammi con ripetizione). Quindi abbiamo $P = \dfrac{34!}{10!9!8!7!}$ casi possibili. Quante sono le configurazioni in cui Antonio ha il 7 di denari? Per un conto analogo a quello appena svolto, sono $P_A = \dfrac{33!}{10!9!8!6!}$. Quindi, semplificando più fattori possibili, si ha $\dfrac{P_A}{P} = \dfrac{7}{34}$ del totale dei casi possibili. Analogamente otteniamo $\dfrac{P_B}{P} = \dfrac{8}{34}$, $\dfrac{P_C}{P} = \dfrac{9}{34}$, $\dfrac{P_D}{P} = \dfrac{10}{34}$.
   Seconda Soluzione
   La probabilità è definita come casi favorevoli/casi possibili; qui considereremo "caso" un qualunque possibile ordinamento delle 40 carte. Contiamo i casi possibili, cioè i possibili modi di riordinare 40 carte in modo che le carte A, B, C siano in tre delle posizioni 1-10, le carte D, E siano in due delle posizioni 11-20, la carta E sia in una delle posizioni 21-30. Per fare questo, fissiamo innanzitutto le posizioni delle carte "obbligate": possiamo posizionare A, B, C in $10 \cdot 9 \cdot 8$ modi, D, E in $10 \cdot 9$ modi, F in 10 modi. Quindi abbiamo $103 \cdot 92 \cdot 8$ modi di fissare la posizione delle sei carte note. Le restanti carte possono andare nelle posizioni rimaste libere in un qualunque ordine, e questi ordinamenti sono 34! (difatti, ogni possibile ordinamento delle 40 carte che soddisfa i requisiti richiesti si ottiene in uno e un solo modo scegliendo la posizione delle 6 carte "obbligate" e l'ordine in cui compaiono negli spazi liberi le 34 carte "libere"). Quindi i casi possibili sono $P = 103 \cdot 92 \cdot 8 \cdot 34!$. Un calcolo analogo fornisce $F_A = 103 \cdot 92 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 33!$ per i casi in cui fissiamo il vincolo aggiuntivo che il 7 di denari sia nella mano di A, e allo stesso modo $F_B = 103 \cdot 92 \cdot 82 \cdot 33!$, $F_C = 103 \cdot 93 \cdot 8 \cdot 33!$, $F_D = 104 \cdot 92 \cdot 8 \cdot 33!$. Quindi le probabilità da confrontare sono $\dfrac{F_A}{P} = \dfrac{7}{34}$, $\dfrac{F_B}{P} = \dfrac{8}{34}$, $\dfrac{F_C}{P} = \dfrac{9}{34}$, $\dfrac{F_D}{P} = \dfrac{10}{34}$, e la maggiore è $\dfrac{F_D}{P}$.

5. La risposta è **(C)**. Sostituendo $m = n+5$, l'espressione data diventa $\dfrac{3m-15}{m}$, cioè $3 - \dfrac{15}{m}$. Affinché sia intera, quindi, m deve essere un divisore di 15, per cui le possibilità sono solo 1, 3, 5, 15 e i loro

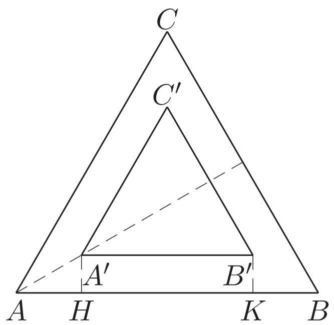
opposti. Di queste, le uniche per cui l'espressione è un multiplo di 4 sono 1, -3, 5 e -15, per cui gli n cercati sono -20, -8, -4 e 0.

6. La risposta è **(B)**. Sviluppiamo sul piano la superfice laterale della montagna, tagliandola lungo il segmento DC. Si avrà un settore circolare di centro C, raggio 4 km, ossia la lunghezza di DC, e delimitato da un arco di circonferenza di 4π km, ossia la circonferenza di base della montagna originaria. Lo sviluppo sarà allora un semicerchio. In particolare il punto D si troverà ad uno degli estremi dell'arco di circonferenza che delimita il semicerchio e P a metà di quest'arco, perciò l'angolo $P\widehat{C}D$ sarà retto. Inoltre $CD = 4$ km, la distanza tra C e la porta dell'Inferno è di 3 km, allora la distanza tra D e la porta dell'Inferno è di 5 km per il teorema di Pitagora.

7. La risposta è **(B)**. Si possono calcolare direttamente tutte le cifre del numero. Si ha $10^{16}+1 = \dfrac{10^{32}-1}{10^{16}-1}$ (è il prodotto notevole $(a-1)(a+1) = a^2-1$), e scomposizioni analoghe per gli altri termini. Quindi
$$\begin{aligned}&(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)\\ =&\frac{10^{32}-1}{10^{16}-1}\frac{10^{16}-1}{10^8-1}\frac{10^8-1}{10^4-1}\frac{10^4-1}{10^2-1}\frac{10^2-1}{10-1}\\ =&\frac{10^{32}-1}{9}=\frac{\overbrace{999\ldots9}^{32\text{ cifre}}}{9}=\overbrace{111\ldots1}^{32\text{ cifre}}.\end{aligned}$$

8. La risposta è **(C)**. Sia a la somma dei voti insufficienti, b la somma di quelli sufficienti, m il numero di insufficienze nella classe, n il numero di sufficienze nella classe. La media delle insufficienze è $\dfrac{a}{m}$ e quella delle sufficienze $\dfrac{b}{n}$. Possiamo considerare $a, b, m, n > 0$. Inoltre l'ipotesi ci assicura che a, b sono due numeri naturali.
$\dfrac{a}{m} = 4{,}6 = \dfrac{23}{5} \quad\Rightarrow\quad 23m = 5a; \qquad \dfrac{b}{n} = 7{,}1 = \dfrac{71}{10} \quad\Rightarrow\quad 71n = 10b;$
Dato che 5 non divide 23, m sarà multiplo di 5. Allo stesso modo n sarà multiplo di 10. Al minimo, $m = 5$ e $n = 10$, dunque un totale di 15 alunni. È facile verificare che ci possa essere una situazione del genere che rispetti le nostre ipotesi, ad esempio l'insieme di voti 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8.

9. La risposta è **(A)**. Detto ABC il triangolo che forma la base, la zona di sicurezza è un triangolo $A'B'C'$ (con A' appartenente alla bisettrice dell'angolo in A e cicliche) interno al triangolo ABC. Dette H e K le proiezioni di A' e B' rispettivamente sul lato AB, si ha $A'H = 1$ metro. Poiché il triangolo $A'AH$ è un mezzo triangolo equilatero (gli angoli in A, A' e H valgono rispettivamente 30, 60 e 90 gradi), il lato AH è lungo $2\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, da cui $A'B' = HK = AB - AH - BK = AB - 2\cdot AH = 8 - 2\cdot\sqrt{3}$ metri. Quindi l'area del triangolo $A'B'C'$ è data da



$(8-2\cdot\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = (64+12-32\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 19\sqrt{3}-24$, che è l'area cercata (in metri quadrati).

10. La risposta è **(C)**. Innanzitutto, c'è almeno un numero a_k che non è divisibile per 2, altrimenti 2 divide $\mathrm{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Vogliamo provare che a_k deve avere almeno due fattori primi distinti: difatti, se così non fosse, dovremmo avere $a_k = p^s$ per qualche primo p e naturale s. Ma in questo caso, per ogni altro numero $h = 1, 2, 3, 4$, $h \neq k$, si ha che $\mathrm{mcd}(a_h, a_k)$ può essere solo un numero della forma p^r, con $1 < r \leq s$ (perché dev'essere un divisore di p^s, ed è maggiore di 1 per la prima ipotesi). Ma questo implicherebbe che tutti e quattro i numeri sono multipli di p, impossibile per la seconda ipotesi. Quindi c'è almeno un numero a_k che ha almeno due fattori primi diversi da due, e quindi vale almeno $3\cdot 5 = 15$. D'altra parte, si verifica che la quaterna $6, 10, 12, 15$ soddisfa tutte le ipotesi del problema, quindi 15 è veramente il minimo che cerchiamo.

11. La risposta è **(D)**. I multipli di 3 compresi tra 1 e 20 sono 6, dunque ci sono 14 numeri che non sono multipli di 3. Se estraessimo giusto quei 14 numeri, il loro prodotto non sarebbe un multiplo

di 3 e men che meno di 12, dunque il numero n di estrazioni minime per assicurarci che il prodotto sia un multiplo di 12 è maggiore di 14. Se estraiamo 15 numeri, invece, avremo sicuramente almeno un multiplo di 3. Dato che i numeri pari compresi tra 1 e 20 sono 10, e quelli dispari 10, con 15 estrazioni ci assicuriamo almeno 5 numeri pari. Dunque il prodotto sarà un multiplo di 3 e un multiplo di $2^5 = 32$. In particolare, sarà multiplo di 3 e di 4, e dunque di 12. Ne consegue che n è proprio 15.

12. La risposta è **(D)**. Notiamo innanzitutto che se $p(x)$ ha grado d, allora $p(x+1) - p(x)$ ha grado esattamente $d-1$. Per semplicità indichiamo genericamente con $\bigstar$ una somma di termini di grado inferiore a $d-1$. Ponendo $p(x) = ax^d + bx^{d+1} + \bigstar$, si ha

$$\begin{aligned} p(x+1) - p(x) =& a(x+1)^d - ax^d + b(x+1)^{d-1} - bx^{d-1} + \bigstar \\ =& (ax^d + adx^{d-1} + \bigstar) - ax^d + (bx^{d-1} + \bigstar) - bx^{d-1} + \bigstar \\ =& adx^{d-1} + \bigstar. \end{aligned}$$

Quindi $p(x+1) - p(x)$ ha grado esattamente $d-1$. Ora, indichiamo $r(x) := p(x+1) - p(x)$ e $s(x) := r(x+1) - r(x)$; si ha

$$\begin{aligned} s(x) =& \big(p(x+2) - p(x+1)\big) - \big(p(x+1) - p(x)\big) \\ =& p(x+2) - 2p(x+1) + p(x), \\ s(x) - s(x-1) =& \big(p(x+2) - 2p(x+1) + p(x)\big) - \big(p(x+1) - 2p(x) + p(x-1)\big) \\ =& p(x+2) - 3p(x+1) + 3p(x) - p(x-1). \end{aligned}$$

Applicando più volte il risultato sopra dimostrato, abbiamo allora che il grado di $r(x)$ è 2010-1=2009, il grado di $s(x)$ è 2008, il grado di $s(x) - s(x-1)$ è 2007 (per ottenere quest'ultima dobbiamo porre $y := x - 1$ e applicare il risultato a $s(y+1) - s(y)$).

Seconda Soluzione

Per ogni numero intero positivo i, definisco il polinomio

$$\binom{x}{i} = \frac{x \cdot (x-1) \cdots (x-i+1)}{i!}$$

pongo $\binom{x}{0} = 1$ e $\binom{x}{i} = 0$ per ogni intero $i < 0$. I fatti che mi servono a proposito di questi polinomi sono due:

il primo è che, per i positivo, $\binom{x}{i}$ ha grado i, e, in particolare, il coefficiente di x^i in $\binom{x}{i}$ è $\frac{1}{i!}$ (basta osservare che il coefficiente della x in ciascuno degli i fattori di primo grado che compongono il numeratore è 1)

il secondo è l'equazione $\binom{x+1}{i+1} - \binom{x}{i+1} = \binom{x}{i}$, che vale per ogni intero i: per valori positivi di i si ha infatti

$$\begin{aligned} &\binom{x+1}{i+1} - \binom{x}{i+1} = \\ &\qquad = \frac{(x+1) \cdot x \cdots (x-i+1)}{(i+1)!} - \frac{x \cdots (x-i+1) \cdot (x-i)}{(i+1)!} \\ &\qquad = \frac{x+1}{i+1}\binom{x}{i} - \frac{x-i}{i+1}\binom{x}{i} = \binom{x}{i} \end{aligned}$$

per $i = 0$ l'equazione si riduce a $x+1-x = 1$, e per $i < 0$ è conseguenza immediata della definizione.

Applicando questo secondo fatto, ottengo

$$\begin{aligned}
&\binom{x-1}{i} - 3\binom{x}{i} + 3\binom{x+1}{i} - \binom{x+2}{i} = \\
&\qquad\qquad = -\left(\binom{x}{i} - \binom{x-1}{i}\right) + 2\left(\binom{x+1}{i} - \binom{x}{i}\right) - \left(\binom{x+2}{i} - \binom{x+1}{i}\right) \\
&\qquad\qquad = - \binom{x}{i-1} + 2\binom{x+1}{i-1} - \binom{x+2}{i-1} \\
&\qquad\qquad = \left(\binom{x+1}{i-1} - \binom{x}{i-1}\right) - \left(\binom{x+2}{i-1} - \binom{x+1}{i-1}\right) \\
&\qquad\qquad = \binom{x+1}{i-2} - \binom{x+2}{i-2} \\
&\qquad\qquad = -\binom{x+2}{i-3}
\end{aligned}$$

dove al primo e al terzo passaggio ho semplicemente riordinato la somma.
Considero, adesso, un polinomio $p(x)$ di grado d. Sostengo che esso può essere scritto nella forma

$$p(x) = a_d\binom{x}{d} + \cdots + a_1\binom{x}{1} + a_0$$

per una opportuna scelta di numeri reali $a_0, \ldots, a_d$. Infatti, chiamando k il coefficiente di testa di $p(x)$ e ponendo $a_d = kd!$, ottengo che $p(x) - a_d\binom{x}{d}$ ha grado minore di d, poiché i monomi di grado d si cancellano. Ripetendo il procedimento su questo nuovo polinomio ottengo un a_{d-1} tale che il grado di $p(x) - a_d\binom{x}{d} - a_{d-1}\binom{x}{d-1}$ è minore di $d-1$. Seguitando ad abbassare il grado del polinomio arrivo al punto in cui $p(x) - a_d\binom{x}{d} - a_{d-1}\binom{x}{d-1} - \cdots - a_1\binom{x}{1}$ ha grado 0, ossia è una costante, e pongo a_0 uguale a tale costante.
Ora è facile calcolare il polinomio richiesto dal testo, raccogliendo i coefficienti a_i

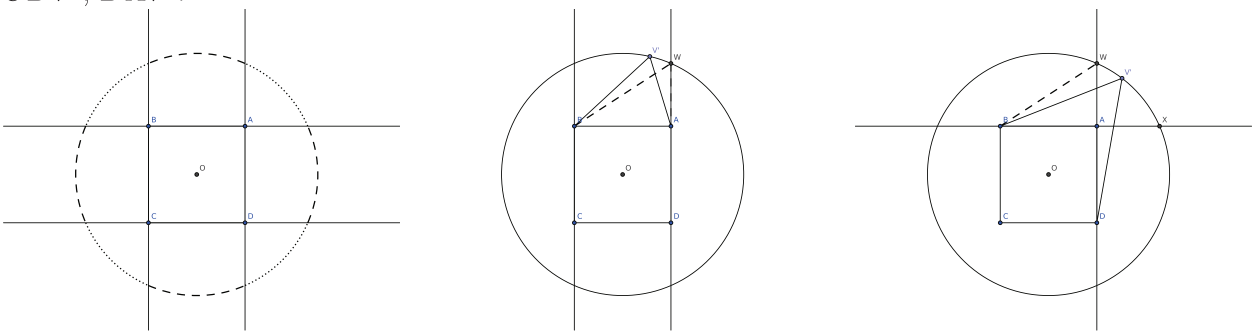
$$\begin{aligned}
&p(x-1) - 3p(x) + 3p(x+1) - p(x+2) = \\
&\qquad\qquad = a_d\left(\binom{x-1}{d} - 3\binom{x}{d} + 3\binom{x+1}{d} - \binom{x+2}{d}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad = -a_d\binom{x+2}{d-3} - a_{d-1}\binom{x+2}{d-4} - \cdots - a_3
\end{aligned}$$

e questo è un polinomio di grado $d-3$, poiché il grado di $\binom{x+2}{d-3}$, come quello di $\binom{x}{d-3}$, è $d-3$, mentre il grado degli altri addendi è minore. La risposta corretta è pertanto 2007.

13. La risposta è 373.
Troviamo tutti i numeri che verificano le condizioni del testo.
Innanzi tutto notiamo che se abbiamo trovato tutti i numeri accettabili di n cifre, allora un numero accettabile di $n+1$ cifre dovrà necessariamente contenere uno dei numeri di n cifre. In particolare, se scopriamo che non esiste un numero di k cifre, allora non esisterà nessun numero accettabile con più di k cifre.
I numeri accettabili di una cifra sono i primi di una cifra, cioè 2, 3, 5 e 7. Notiamo che però la cifra 2 e la cifra 5 possono stare solo all'inizio di un numero accettabile (altrimenti il numero avrebbe una sottosequenza divisibile rispettivamente per 2 o per 5).
I numeri accettabili di due cifre sono quindi 23, 37, 53, 73.
Vediamo ora i numeri di 3 cifre. Nessuno può finire per 23 o per 53. Poi 237, 537, 273 e 573 non sono accettabili in quanto multipli di 3. Nessun numero può cominciare con la stessa coppia di cifre, altrimenti avrebbe una sottosequenza multipla di 11 (ad esempio in 773 la sottosequenza 77 è multiplo di 11). Restano da controllare 373 che risulta essere primo (e quindi accettabile) e 737

che è multiplo di 11.
Vediamo ora se ci possono essere numeri di 4 cifre. Dobbiamo controllarne solo 4: 2373, 3373, 5373 e 7373. Il primo ed il terzo contengono una sottosequenza multipla di 3. Il secondo contiene una sottosequenza multiplo di 11, e l'ultimo risulta multiplo di 101. Non esistono dunque numeri accettabili di 4 cifre e, per quanto detto all'inizio, non esisteranno numeri accettabili con più di 4 cifre. Il codice cercato è dunque 373.

14. La risposta è 27. Chiamiamo $ABCD$ la base della piramide e V il suo vertice lontano da terra. Si noti che l'ombra V' del punto V cade su una circonferenza di raggio 15 m centrata nel centro di $ABCD$, e a seconda dell'orientazione del sud rispetto alla piramide (che consideriamo fissa) può cadere su uno qualunque dei punti della circonferenza. L'ombra della piramide (inclusa questa volta l'area di terreno sotto la piramide stessa) è formata dall'unione dei quattro triangoli ABV', BCV', CDV', DAV'.



Questa ombra può assumere due forme notevolmente diverse. Si faccia riferimento alle figure: quando V' cade in una delle parti di circonferenza tratteggiate nella figura in alto, l'ombra è un pentagono (figura a sinistra); quando V' cade invece in una delle altre parti, l'ombra è un quadrilatero (figura a destra). Si chiami W (risp. X) l'intersezione della semiretta DA (risp. BA) con la circonferenza. Vogliamo mostrare che in entrambe le configurazioni l'area dell'ombra è maggiore o uguale all'area del trapezio $WBCD$. Difatti, nella configurazione del disegno a sinistra, $S(\text{ombra}) = S(ABCD) + S(ABV')$, e $S(ABV') \geq S(ABW)$ perché si tratta di due triangoli con uguale base AB, e l'altezza di ABV' è maggiore di quella di ABW. Analogamente, nella configurazione del disegno a sinistra, $S(\text{ombra}) = S(BCD) + S(BDV')$, e $S(BDV') \geq S(BDW)$ perché si tratta di due triangoli con uguale base BD, e l'altezza di BDV' è maggiore di quella di BDW (per rendersene conto basta notare che WX è parallelo a BD). Quindi l'ombra di area minore si ha quando $V' = W$, o nelle configurazioni simmetriche sugli altri lati. Va quindi calcolata l'area del triangolo ABW. Detto M il punto medio di AD, abbiamo che $MW \perp OM$, $OW = 15$ m, $OM = 9$ m, da cui per il teorema di Pitagora $MW = \sqrt{OW^2 - OM^2} = 12$ m. Quindi $AW = MW - AM = 12 - 9 = 3$ m, e $S(ABW) = \dfrac{AB \cdot AW}{2} = \dfrac{18 \cdot 3}{2} = 27\ \text{m}^2$.

15. Supponiamo $p = q$. Sostituendo otteniamo $p^2(2 - n) = 1$ che è impossibile perché 1 non è diviso da nessun primo. Quindi necessariamente p e q sono diversi; poiché l'equazione è simmetrica in p e q possiamo supporre che $q > p$, cioè $q \geq p + 1$. Scriviamo ora la nostra equazione come:

$$p^2 - 1 = pqn - q^2 = q(pn - q) \ .$$

Questo vuol dire che $p^2 - 1$ è multiplo di q e quindi q è un divisore primo di $p^2 - 1$. Quindi

$$q | p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) \ .$$

Ora, essendo q un numero primo, esso deve essere presente o nella fattorizzazione di $p - 1$ oppure in quella di $p + 1$; in entrambi i casi $q \leq p + 1$. Per ipotesi iniziale avevamo $q \geq p + 1$ e quindi ottengo che $q = p + 1$. Tra due numeri successivi uno necessariamente deve essere pari e dunque è 2 (l'unico primo pari) e l'altro è necessariamente 3 poiché 1 non è primo. Ora controlliamo che si possa risolvere l'equazione in n sostituendo $p = 2$ e $q = 3$:

$$4 + 9 = 6n + 1 \ ,$$

da cui $n = 2$. Le uniche due soluzioni sono dunque $(2, 3, 2)$ e $(3, 2, 2)$.

16. Sia P il punto di intersezione tra il prolungamento di CM e BN e sia R il punto di intersezione tra il prolungamento di AM e BC; indichiamo inoltre con β l'angolo $C\widehat{B}A$.

Dimostrazione della prima parte

Diamo due dimostrazioni di questo punto.

Primo argomento

Per il teorema dell'angolo esterno applicato all'angolo in N del triangolo ABN, $B\widehat{A}M = B\widehat{A}N = \beta - N\widehat{B}A$. Ma $C\widehat{B}N + N\widehat{B}A = C\widehat{B}A = \beta$, quindi $C\widehat{B}N = \beta - N\widehat{B}A = B\widehat{A}M$.

Secondo argomento

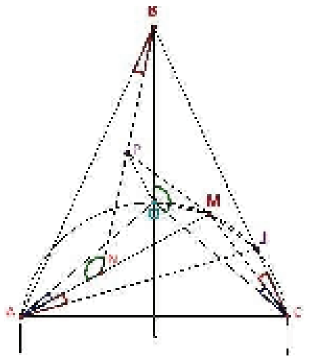
Consideriamo i triangoli ABR e BNR: essi hanno l'angolo in R in comune e gli angoli corrispondenti $R\widehat{B}A$ e $B\widehat{N}R$ uguali a β per ipotesi, quindi sono simili. Ma allora anche $R\widehat{B}N = R\widehat{A}B$ e quindi $C\widehat{B}N = R\widehat{B}N = R\widehat{A}B = B\widehat{A}M$.

Dimostrazione della seconda parte

Consideriamo ora il triangolo MNP: l'angolo esterno in M è $C\widehat{M}N = C\widehat{M}A$ e vale perciò 2β. Ma per il teorema dell'angolo esterno allora $M\widehat{P}N = 2\beta - P\widehat{N}M = 2\beta - \beta = \beta$ (quindi MNP è isoscele).

Consideriamo infine i triangoli BCP e ABN: gli angoli corrispondenti in P ed in N sono complementari di angoli uguali per quanto appena dimostrato e sono quindi uguali, mentre gli angoli corrispondenti in B ed in A sono uguali per quanto visto nella prima parte. I due triangoli sono quindi simili, anzi congruenti in quanto il lato BC del primo è uguale al lato corrispondente AB del secondo (ABC è isoscele per ipotesi). Quindi anche $CP = BN$ in quanto sono anch'essi lati corrispondenti di questi due triangoli. Ma poiché MNP è isoscele, $CM + MN = CM + MP = CP$ e quindi $CM + MN = BN$, come volevasi dimostrare.

Seconda Soluzione



Denominato α l'angolo $A\widehat{B}C$, il luogo dei punti interni al triangolo ABC che vedono il segmento AC sotto un angolo pari a 2α è un arco di circonferenza Γ passante per il circocentro O di ABC; il teorema dell'angolo al centro garantisce infatti che si abbia $A\widehat{O}C = 2\,A\widehat{B}C$. Poiché ABC è isoscele su base AC ed acutangolo, O si trova lungo l'asse del segmento AC internamente al triangolo, e i triangoli AOB, BOC, COA risultano isosceli. Detta J l'intersezione di Γ con CB e posto $\theta = J\widehat{A}M, \phi = M\widehat{A}O$ si ha:

$\theta = J\widehat{C}M = J\widehat{A}M$ in quanto entrambi sottendono l'arco JM in Γ,

$\phi = M\widehat{C}O = M\widehat{A}O$ in quanto entrambi sottendono l'arco MO in Γ,

ma chiaramente $\theta + \phi = B\widehat{C}O = \dfrac{\alpha}{2}$, alché:

$$B\widehat{N}M = \alpha \longrightarrow B\widehat{N}A = C\widehat{O}B = \pi - \alpha,$$

da cui segue $A\widehat{B}N = \theta$. Detta ρ una simmetria rispetto all'asse di AC seguita da una simmetria rispetto all'asse di BA, poniamo $P = \rho(M)$. Poiché le simmetrie preservano gli angoli, PB forma un angolo pari a θ con BA, il che garantisce che P giaccia su BN. La trasformazione ρ, in quanto composizione di simmetrie assiali, è una rotazione antioraria di centro O (intersezione dell'asse di CB e dell'asse di BA) di ampiezza pari a $\pi - \alpha = C\widehat{O}B$, in particolare realizza $CM = BP$ e $OM = OP$. Si ha inoltre:

$$O\widehat{M}A = O\widehat{C}A = O\widehat{A}C, \quad O\widehat{P}N = \pi - O\widehat{P}B = \pi - O\widehat{M}C,$$

ma $O\widehat{M}A$ ed $O\widehat{A}C$ sottendono il medesimo arco CO in Γ da parti opposte rispetto al centro, dunque sommano ad un angolo piatto. Il triangolo MNP è conseguentemente isoscele per congruenza degli angoli che insistono su MP e si ha:

$$CM + MN = BP + MN = BP + PN = BN$$

come voluto.

17. La risposta è **144**.

Per brevità indicheremo con *buono* un modo di ordinare i numeri $a_1, \ldots, a_7$ assegnati che soddisfi le caratteristiche richieste. Cerchiamo di stabilire alcune proprietà degli ordinamenti *buoni*.

i) perché un ordinamento sia *buono* non è importante quali siano i numeri scelti dall'insieme assegnato ma soltanto qual è il resto della loro divisione per 3.

ii) il resto di ciascuno degli elementi di un ordinamento *buono* $(a_1, \ldots, a_7)$ è determinato completamente una volta scelto quello dei primi quattro elementi.
Infatti dato che l'ordinamento è buono, sia $a_2 + \ldots + a_5 = (a_1 + \ldots + a_4) + (a_5 - a_1)$ che $a_2+\ldots+a_5$ e $a_1+\ldots+a_4$ sono divisibili per tre; inoltre, $a_2+\ldots+a_5 = (a_1+\ldots+a_4)+(a_5-a_1)$ per cui anche $(a_5 - a_1)$ deve esserlo. Questo significa che a_5 ed a_1 se divisi per 3 danno lo stesso resto.
Analogamente possiamo dire la stessa cosa per le coppie a_2, a_6 e a_3, a_7.

iii) Il resto della divisione per tre di un numero intero può essere soltanto 0, 1 o 2. Per brevità parleremo di numeri di tipo 0, 1 o 2 a seconda di quale delle tre possibilità si presenti.
La somma di quattro numeri è divisibile per tre soltanto se (a meno dell'ordine) i quattro numeri sono dei tipi seguenti:

$$0, 0, 0, 0 \qquad \text{oppure} \qquad 1, 2, 0, 0 \qquad \text{oppure} \qquad 1, 2, 1, 2.$$

Nell'insieme a nostra disposizione abbiamo però soltanto 3 numeri di tipo 0, (21,51,81), soltanto due (31,61) di tipo 1 e soltanto due (41,71) di tipo 2. Questo esclude la prima e la terza possibilità.Quest'ultima perché in base alla proprietà ii) dovremo necessariamente proseguire con altri elementi di tipo 1 o 2 che però non abbiamo a disposizione.

iv) non tutti gli ordinamenti di 1,2,0,0 sono possibili: ancora per la proprietà ii) non possono esserci due numeri di tipo "0" nei primi tre posti. Se così non fosse troveremo ancora due numeri di tipo "0" negli ultimi tre posti per un totale di quattro, ma ne abbiamo a disposizione soltanto tre.
Di conseguenza il numero al quarto posto deve essere per forza di tipo "0" e i tipi degli elementi a_1, a_2, a_3 devono essere identici a quelli degli elementi a_5, a_6, a_7 rispettivamente.

A questo punto siamo in grado di calcolare quanti sono gli ordinamenti *buoni*:

- l'elemento al quarto posto può essere scelto solo tra 21, 51, 81 ovvero in tre modi diversi;
- ai primi tre posti ci deve essre un numero di tipo 0, uno di tipo 1 e uno di tipo 2. I modi possibili di ordinare i tipi di numero sono 6.
- per ciascuno dei tipi dei primi tre elementi della sequenza è possibile scegliere tra due numeri diversi dell'insieme. Quindi per ciascuno dei modi di ordinare i tipi ci sono $2 \times 2 \times 2 = 8$ modi diversi di scegliere.
- una volta fatte le scelte ai punti precedenti, gli elementi agli ultimi tre posti sono univocamente determinati.

Riepilogando, il numero di ordinamenti *buoni* è:

$$3 \times 6 \times 8 = 144.$$