Soluzioni inviate da G. Colombo del Liceo Scientifico "Tosi" di Busto A.

1.

Il cateto OB, che chiamo d, è uguale a $2a + b$; infatti, tracciando il triangolo PES congruente al triangolo QOP e con l'ipotenusa coincidente con il lato del quadrato PQRS, si trova che

$d = a + b + (d - (a + b))$

e che

$d - (a + b) = a$, poiché il triangolo SEB è un triangolo rettangolo isoscele (l'angolo in E è di 90° perché supplementare dell'angolo PES, retto; l'angolo in B è di 45° per costruzione; l'angolo in S è di 45° perché uguale a 180° – (90° + 45°)) e il cateto ES è uguale ad a.

$$A_{AOB} = \frac{d^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 = \frac{2A_{AOB}}{5} = \frac{d^2}{5}$$

$$d^2 = (2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{5}$$

$$5a^2 + 5b^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2 = 0$$

$$a - 2b = 0$$

$$a = 2b$$

Il rapporto tra a e b è quindi 2:1.

2.

$$N = abc = 6(a + b + c)$$

$$a + b = c$$

$$N = 6(2c) = 12c$$

$$abc = 12c$$

$$ab = 12$$

$$\{(a,b) \mid ab = 12 \wedge (a,b) \in N_0\} = \{(1;12);(2;6);(3;4);(4;3);(6;2);(12;1)\}$$

Esistono quindi sei coppie ordinate (a, b) di interi positivi che soddisfano la condizione ab = 12, e N può assumere i valori: 12(12+1) = 156; 12(2+6) = 96; 12(3+4) = 84 (per la proprietà commutativa, due coppie ordinate costituite dagli stessi elementi a e b implicano lo stesso valore di N).

La somma dei possibili valori di N è dunque pari a 156+96+84 = 336.

3.

La quantità di numeri pari compresi nell'insieme deve essere un numero pari per soddisfare le condizioni poste, poiché se la quantità di numeri dispari fosse un numero dispari, la somma sarebbe a sua volta un numero dispari, e quindi necessariamente diverso da 2900.

Se i 50 numeri sono tutti dispari, il massimo valore che la loro somma può raggiungere è pari a 1 + 3 + ... + 97 + 99 = 2500, per cui il numero minimo di numeri pari contenuti nell'insieme deve essere superiore a 0.

Ugualmente si verifica che il massimo valore che può assumere la somma di 48 numeri dispari e 2 numeri pari è uguale a 5 + 7 + ... + 95 + 97 + 98 + 99 + 100 = 2694, per cui 2 numeri pari non sono sufficienti.

Ugualmente si verifica che il massimo valore che può assumere la somma di 46 numeri dispari e 4 numeri pari è uguale a 9 + 11 + ... + 89 + 91 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 2872, per cui 4 numeri pari non sono sufficienti.

Il massimo valore che può assumere la somma di 44 numeri dispari e 6 numeri pari è invece uguale a 13 + 15 + ... + 87 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 3034, per cui 6 numeri pari sono sufficienti per ottenere 2900 come somma (il caso può essere verificato, ad esempio, dalla somma 13 + 15 + ... + 97 + 99 + 20 + 28 + 94 + + 96 + 98 + 100 = 2900).