Ecco una proposta di soluzione. Ovviamente sono possibili altre soluzioni.
Alcune cose da sapere:

- la somma dei primi n numeri interi è pari a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

- la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di primo termine a_1 e ultimo termine a_n è pari a $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$;

- la dimostrazione per induzione.

1. Sapendo che $f(4) = 10$ e che vale la relazione $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$, ponendo $x = 2$, $y = 2$ otteniamo:

$$f(4) = 2f(2) + 4, \quad 10 = 2f(2) + 4,$$

e in questo modo otteniamo $f(2) = 3$. In modo analogo, ponendo $x = 1, y = 1$ otteniamo:

$$f(2) = 2f(1) + 1, \quad 3 = 2f(1) + 1,$$

ricaviamo: $f(1) = 1$. Utilizzando quanto dimostrato in precedenza otteniamo, ponendo $x = n$ e $y = 1$:

$$f(n + 1) = f(n) + 1 + n.$$

Possiamo ora dimostrare che $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 2) + (n - 1) + n$, ovvero la funzione associa ad ogni numero n la somma dei primi n numeri interi.

Dimostriamo questo fatto per induzione su n:

(a) se $n = 1$ l'enunciato è vero ($f(1) = 1$);

(b) ammettiamo vero l'enunciato per n, ovvero $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$, allora risulta: $f(n + 1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n + (n - 1)$.
Sappiamo che $f(n + 1) = f(n) + 1$, per la dimostrazione precedente, e, per ipotesi induttiva, sappiamo anche che $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$. Effettuando la sostituzione otteniamo: $f(n + 1) = [1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n] + (n + 1)$, cvd.

Quindi $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, e possiamo ora dire che:

$$f(2008) = \frac{2008 \cdot 2009}{2} = 2017036.$$

2. Ricordiamo che $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, questo risulterà utile nel seguito.

$$(2000^2 - 1999^2) + (1998^2 - 1997^2) + \cdots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2) =$$

$$= (2000-1999)(2000+1999)+(1998-1997)(1998+1997)+\cdots+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1) =$$

$$= 1 \cdot 3999 + 1 \cdot 3995 + \cdots + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3.$$

La somma richiesta a questo punto è facilmente calcolabile notando che i vari addendi sono i primi 1000 termini di una progressione aritmetica di primo termine 3 ragione 4.

Tale somma è quindi data da: $S = \frac{1}{2}1000(3 + 3999) = 2001000$.

3. Per effettuare la dimostrazione richiesta iniziamo con il notare un fatto:

   Assegnato un triangolo ABC e detti D, E, F i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC e BC, l'area del quadrilatero di vertici $ADGE$ è $\frac{1}{3}$ dell'area del triangolo, con G baricentro dello stesso.

   Infatti:

   (a) I triangoli ADG e DGB sono equivalenti - hanno basi congruenti $BD \cong AD$ per hp. e la stessa altezza - distanza di G dalla base AB;

   (b) in modo analogo si dimostra che AEG e EGC sono triangoli congruenti;

   (c) per una nota proprietà del baricentro, risulta: $2DG \cong GC$;

   (d) utilizzando quanto detto al punto precedente possiamo concludere che le aree del triangolo DAG è la metà dell'area del triangolo AGC - il rapporto delle basi è $\frac{1}{2}$ per quanto ricordato al punto precedente, tali triangoli hanno la stessa altezza - distanza di A dalla retta DC;

   (e) per il punto precedente possiamo concludere che $2A(ADG) = A(AGC)$;

   (f) ma per quanto ricordato prima risulta anche: $A(AGC) = 2A(AGE)$, e quindi risulta anche: $A(ADG) = A(AGE)$;

   (g) notiamo che l'area del triangolo ADC è pari alla metà dell'area del triangolo ABC di partenza, sempre per motivazioni analoghe a quelle precedenti;

   (h) risulta quindi: $A(ADGE) = 2A(AGE) = \frac{2}{3}A(ADC) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}A(ABC) = \frac{1}{3}A(ABC)$.

   Passiamo all'enunciato che vogliamo dimostrare. Fissiamo l'attenzione sul triangolo ABP. In tale triangolo D e E sono i punti medi di due lati e Q è il baricentro del triangolo. Applicando la proposizione prima dimostrata abbiamo che $A(DQEP) = \frac{1}{3}A(ABP)$, ed in modo analogo otteniamo che $A(DPFS) = \frac{1}{3}A(APC)$ e $A(PERF) = \frac{1}{3}A(BCP)$. Quindi possiamo concludere che:

$$A(DQERFS) = \frac{1}{3}(A(ABP) + A(ACP) + A(BPC)) = \frac{1}{3}A(ABC),$$

   questo in quanto l'esagono si può scomporre nell'unione dei tre quadrilateri prima richiamati, e il triangolo iniziale nell'unione dei tre triangoli aventi due vertici nei vertici del triangolo ed un vertice nel punto P. Dato che l'area dell'esagono risulta essere $\frac{1}{3}$ dell'area del triangolo iniziale, possiamo concludere che non dipende dalla particolare scelta del punto P all'interno del triangolo.