**Olimpiadi della mateamtica**
**Varese**

*Il problema della settimana*

1. Si denotano con $P(n)$ e con $S(n)$ rispettivamente il prodotto e la somma delle cifre di un numero intero positivo $n$. Se il numero $n$ ha due cifre e $P(n) + S(n) = n$, cosa possiamo dire della cifra delle unità del numero $n$?

   **Soluzione.** Scriviamo il numero $n$ nel seguente modo:

   $$n = 10x + y,$$

   con $x$, $y$ numeri interi, tali che $0 < x < 10$, $0 \leq y < 10$. Allora $P(n) = xy$ e $S(n) = x+y$. Per l'ipotesi data deve risultare:

   $$xy + x + y = 10x + y.$$

   Quindi deve risultare: $xy = 9x$, semplificando $x$ otteniamo $y = 9$. Tutti i numeri di due cifre che hanno per cifra delle unità il 9, soddisfano la condizione proposta.

2. Per il polinomio $P(x)$ valgono le seguenti condizioni: $P(0) = 2$, $P(1) = 4$, $P(2) = 6$, $P(3) = 56$. Determinare il resto della divisione di $P(x)$ per il polinomio:

   $$x(x-1)(x-2)(x-3).$$

   **Soluzione.** Iniziamo con il ricordare che assegnato un numero reale $\alpha$, il resto della divisione di $P(x)$ per il binomio $(x - \alpha)$ è pari a $P(\alpha)$. Quindi possiamo scrivere $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + P(\alpha)$, con $Q(x)$ polinomio opportuno.

   Il polinomio iniziale $P(x)$, se diviso per $x$ dà quale resto 2, quindi possiamo scrivere:

   $$P(x) = xQ_1(x) + 2.$$

   Dividiamo ora il polinomio $P(x)$ per $(x - 2)$, sappiamo che il resto di tale divisione è $P(1) = 4$, quindi deve risultare anche: $1 \cdot Q_1(1) + 2 = 4$, dall'ultima uguaglianza possiamo concludere che $Q_1(1) = 2$. Se dividiamo il polinomio $Q_1(x)$ per il binomio: $(x - 1)$ otteniamo quale resto 2, quindi il polinomio $Q_1(x)$ si può scrivere nel seguente modo: $Q_1(x) = (x - 1)Q_2(x) + 2$. Il polinomio iniziale diventa:

   $$P(x) = x[(x-1)Q_2(x) + 2] + 2.$$

Ripetendo la stessa operazione, questa volta dividendo per $(x-2)$ otteniamo:

$$P(x) = x[(x-1)(x-2)Q_3(x) + 2] + 2,$$

e dividendo per $(x-3)$ otteniamo:

$$P(x) = x\{(x-1)(x-2)[(x-3)Q_3(x) + 8] + 2\} + 2.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo che il polinomio iniziale si può scrivere nel seguente modo:

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)Q_3(x) + 8x^3 - 24x^2 + 18x + 2.$$

Quindi il resto della divisione del polinomio iniziale per il polinomio assegnato è:

$$R(x) = 8x^3 - 24x^2 + 18x + 2.$$