Olimpiadi della mateamtica
Varese

Il problema della settimana

1. Le nove cifre 1, 2, 3, $\cdots$, 8, 9 sono scritte di seguito a formare un numero N di nove cifre. Determinare il valore massimo e minimo che può assumere la somma dei 7 numeri di tre cifre ottenute considerando le terne di tre cifre consecutive nella rappresentazione di N.

   Soluzione. Scritto il numero $N = a_1 a_2 \cdots a_9$, indicato con M il numero che dobbiamo calcolare possiamo scrivere:

   $$M = \sum_{i=1}^{7} (a_i 10^2 + a_{i+1} 10 + a_{i+2}).$$

   Quindi, svolgendo i conti, possiamo concludere che valgono le seguenti considerazioni:

   - le cifre a_1, a_2 non compaiono quali cifre delle unità;
   - le cifre a_1, a_9 non compaiono quali cifre delle decine;
   - le cifre a_8, a_9 non compaiono quali cifre delle centinaia.

   Indicato con $S = 3996$ la somma dei primi 9 numeri interi, possiamo riscrivere il numero M come segue:

   $$M = S-(a_1+a_2)+[S-(a_1+a_9)]10+[S-(a_9+a_8)]100 = 111S-110a_9-100a_8-a_2-11a_1.$$

   Scritto il numero M in questo modo, per poter determinare il valore massimo e minimo che assume, possiamo determinare il valore minimo e massimo della somma:

   $$110a_9 + 100a_8 + a_2 + 11a_1.$$

   Il massimo valore di tale somma si ottiene scegliendo le cifre a_9, a_8, a_1, a_2 in modo che risulti: $a_9 > a_8 > a_1 > a_2$. Quindi dobbiamo assegnare i seguenti valori: $a_9 = 9$, $a_8 = 8$, $a_1 = 7$, $a_2 = 6$. In modo analogo possiamo calcolare il valore minimo di tale somma, scegliendo i seguenti valori: $a_9 = 1$, $a_8 = 2$, $a_1 = 3$, $a_4 = 4$.

   Così facendo otteniamo quale valore massimo 1873, mentre il valore minimo è 247.

   Questo ci permette di concludere che il valore massimo di M è pari a 3847 ed il valore minimo è 2123.

2. Sia r il raggio della circonferenza inscritta ed R il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo. Detti $2p$ il perimetro e c la misura dell'ipotenusa, dimostrare che:

$$\frac{2p}{c} - \frac{r}{R} = 2.$$

Tra tutti i triangoli rettangoli, qual è il più grande valore che può assumere $\frac{r}{R}$? Per quale triangolo?

Soluzione. Il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo ABC è il segmento AB, quindi risulta $\overline{AB} = 2R$. Indichiamo con r il raggio della circonferenza inscritta ed in particolare siano: E, H, F i punti di tangenza della circonferenza inscritta rispettivamente con il diametro AB e con i cateti BC e AC. Per i teoremi sulle tangenti condotte da un punto ad una circonferenza sappiamo che:

(a) $AE \cong AF$;
(b) $CF \cong CH$;
(c) $BE \cong BH$.

Possiamo quindi calcolare il perimetro del triangolo nel seguente modo:

$$2p = 2AE + 2BE + 2CH = 2(AE + BE) + 2CH = 4R + 2r,$$

dato che $AE+BE \cong AB$, e $CF \cong CH$, che sono congruenti al raggio della circonferenza inscritta, dato che $CFDH$ e un quadrato.

Se calcoliamo il rapporto prim indicato abbiamo che:

$$\frac{2p}{c} - \frac{r}{R} = \frac{4R + 2r}{2R} - \frac{r}{R} = 2 + \frac{r}{R} - \frac{r}{R} = 2.$$

La conclusione precedente permette di rispondere anche alla seconda parte del quesito. Infatti dalla relazione scritta possiamo dire che:

$$\frac{r}{R} = \frac{2p}{c} - 2.$$

Notiamo che il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo, fissata l'ipotenusa, non varia è infatti pari alla metà dell'ipotenusa c. Il perimetro, come abbiamo visto, risulta pari a $2c + 2r$, quindi il rapporto che dobbiamo studiare si può scrivere come segue:

$$\frac{r}{R} = \frac{2c + 2r}{c} - 2 = \frac{2r}{c},$$

tale espressione ci dice che il rapporto assegnato dipende linearmente da r, quindi il rapporto assume il valore massimo se è massimo il raggio della circonferenza inscritta. Sappiamo che il raggio della circonferenza inscritta ad un triangolo si può calcolare utilizzando la seguente relazione:

$$r = \frac{2A}{2p},$$

con A area del triangolo e $2p$ perimetro dello stesso. Il problema è simmetrico rispetto alla retta perpendicolare ad AB passante per O, quindi il valore del massimo lo si ottiene se si considera il triangolo avente per altezza l'asse di simmetria del problema. Il triangolo richiesto è quindi isoscele e rettangolo. L'area vale $A = R^2$ ed il raggio della circonferenza inscritta è: $r = \dfrac{2R^2}{2R(\sqrt{2}+1)} = R(\sqrt{2}-1)$. Questo permette di concludere che il rapporto massimo è $\sqrt{2}-1$.