

1. Sia ABC un triangolo tale che l'angolo $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Sia M il punto medio del lato AB e siano H e K i piedi delle altezze che partono da B e da A rispettivamente.
Dimostrare che il triangolo HMK è equilatero.

2. Determinare tutte le soluzioni (a, b) , con a, b interi relativi, dell'equazione:

$$a^3 + b^3 = 91.$$

3. Si determinino tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione $n^2 - 2^m = 1$.
Si determinino tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione $2^m - n^2 = 1$.
4. In un quadrilatero convesso $ABCD$ i lati AB, BC, CD sono uguali. Inoltre $AC = BD = AD$.
Quanto misura l'angolo in D ?
5. Dato un numero primo p , determinare tutte le coppie ordinate di numeri naturali (m, n) che verificano l'equazione:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}.$$