UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2010

GARA di SECONDO LIVELLO

9 febbraio 2010

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 10**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:________________ Cognome:________________

Indirizzo:________________ Città:________________

Scuola:________________ Anno di corso:______ Città:________________

e–mail:________________

Codice fiscale:________________ Nazionalità:________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–14)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Con il contributo della società editrice **Zanichelli**
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. 16 coni stradali sono messi in linea retta a distanza di 10 metri uno dall'altro. Si vuole dipingere sulla strada una linea continua che vada dal primo all'ultimo cono. Sapendo che per dipingere 100 metri di linea continua sono necessari 6 litri di vernice, quanti litri di vernice sono necessari per completare questo lavoro?
(A) 8,4 **(B)** 9 **(C)** 9,6 **(D)** 10 **(E)** nessuna delle precedenti.

2. Sia ABC un triangolo equilatero di centro O e area 1. Siano D, E, F i punti simmetrici di O rispetto ai tre lati del triangolo. Quanto vale l'area in comune ai triangoli ABC e DEF?
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(E)** $\frac{2}{3}$.

3. In un'isola ci sono due tipi di abitanti: i cavalieri, che dicono sempre la verità, e i furfanti, che mentono sempre. Abbiamo incontrato su quest'isola un gruppo di quattro abitanti che, interrogati sulla loro identità, hanno risposto:
A: "C'è almeno un furfante tra noi."
B: "Ci sono al massimo due cavalieri tra noi."
C: "Ci sono almeno tre furfanti tra noi."
D: "Non ci sono cavalieri tra noi."
Quanti cavalieri ci sono in questo insieme di quattro abitanti?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** tutti.

4. Antonio, Beppe, Carlo e Duccio si distribuiscono casualmente le 40 carte di un mazzo, 10 a testa. Antonio ha l'asso, il due e il tre di denari. Beppe ha l'asso di spade e l'asso di bastoni. Carlo ha l'asso di coppe. Chi è più probabile che abbia il 7 di denari?
(A) Antonio **(B)** Beppe **(C)** Carlo **(D)** Duccio
(E) due o più giocatori hanno la stessa probabilità di averlo.

5. Per quanti interi relativi n si ha che $\frac{3n}{n+5}$ è intero e divisibile per 4?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** più di 8.

6. La casa di Dante si trova nel punto D ai piedi di una montagna conica con il diametro di base di 4 km e cima nel punto C. Si sa che D dista da C 4 km in linea retta e che, detto P il punto diametralmente opposto a D rispetto alla base della montagna, la porta dell'Inferno si trova a $3/4$ del segmento CP, più vicino a P. Quale distanza deve percorrere Dante al minimo (camminando sulle pendici della montagna) per poter raggiungere la porta dell'Inferno da casa sua?
(A) $\pi + 1$ km **(B)** 5 km **(C)** 2π km **(D)** 7 km **(E)** $2\pi + 1$ km.

7. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero $(10^{16}+1)(10^8+1)(10^4+1)(10^2+1)(10+1)$?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

8. Nella classe di Sergio, dopo la correzione dell'ultimo compito di matematica, al quale tutti gli alunni erano stati presenti, la media aritmetica delle insufficienze è risultata 4,6, mentre la media aritmetica delle sufficienze è risultata 7,1. Sapendo che il professore ha dato soltanto voti interi, quanti alunni ci sono al minimo nella classe di Sergio?
(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 24 **(E)** 30.

9. I rossi e i verdi stanno facendo una battaglia a gavettoni. La base dei rossi è un'area a forma di triangolo equilatero di lato 8 metri. I verdi non possono entrare nella base dei rossi, ma possono lanciare i loro proiettili nella base stando comunque fuori dal perimetro. Sapendo che i verdi riescono a colpire un bersaglio fino ad una distanza massima di 1 metro, quanto è grande (in metri quadrati) la zona all'interno della base dei rossi al sicuro dalla portata di tiro dei verdi?
(A) $19\sqrt{3} - 24$ **(B)** $4\sqrt{3}$ **(C)** $3\sqrt{3}$ **(D)** $19 - 8\sqrt{3}$
(E) ogni punto dell'area rossa è a portata di tiro dei verdi.

10. Quattro interi positivi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ sono tali che, dati due qualunque di essi, il loro massimo comun divisore è maggiore di 1, ma $\mathrm{mcd}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$. Qual è il minimo valore che può assumere a_4?
(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 30 **(E)** 105.

11. In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?
(A) 7 **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18.

12. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2010. Qual è il massimo grado che può avere il polinomio $p(x-1) - 3p(x) + 3p(x+1) - p(x+2)$?
(A) È sempre il polinomio nullo **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2007 **(E)** 2010

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Per rubare un prezioso gioiello, un ladro deve scoprire il codice che permette di aprire la porta della cassaforte. Le informazioni che è riuscito a carpire sono le seguenti:
– il codice è un numero
– qualsiasi sottosequenza di cifre consecutive del codice (dunque sia ogni cifra presa singolarmente, che ogni coppia di cifre, etc. fino a tutto il numero) rappresenta un numero primo (ad esempio, 217 non va bene, perché 1 non è un primo e 21 non è un primo)
– il codice è il numero più grande che abbia questa proprietà.
Qual è il codice segreto per aprire la cassaforte?

14. Il monumento a Mathenkamen è a forma di piramide che poggia sulla sua base quadrata di lato 18 m. La sua altezza misura 15 m, e il piede dell'altezza cade nel centro del quadrato. La piramide è orientata in modo che, quando i raggi del sole arrivano da sud inclinati di 45° rispetto al suolo, l'area della parte di terreno su cui essa spande la sua ombra sia la più piccola possibile. Quanto vale quest'area espressa in m^2?
(Nota: il terreno coperto dalla base della piramide non va contato come terreno in ombra.)

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Trovare tutte le terne ordinate di numeri interi positivi (p, q, n) tali che p, q siano primi e $p^2 + q^2 = pqn + 1$.

SOLUZIONE

Nome:________________________________Cognome:____

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC. All'interno di tale triangolo sono dati un punto M, dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $C\widehat{M}A = 2C\widehat{B}A$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $B\widehat{N}M = C\widehat{B}A$.

– Dimostrare che $C\widehat{B}N = B\widehat{A}M$.

– Dimostrare che $CM + MN = BN$.

SOLUZIONE

Nome:______________________________ Cognome:____

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
In quanti modi diversi si possono mettere in fila i numeri $\{21, 31, 41, 51, 61, 71, 81\}$ in modo che, comunque se ne scelgano quattro in posti consecutivi, la loro somma sia divisibile per tre?

SOLUZIONE

Nome:________________ Cognome:________________