Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio si occupa di studiare dei metodi per effettuare, velocemente, il calcolo delle cardinalità (numero degli elementi che dai quali è composto) di alcuni insiemi.

Iniziamo con un esempio:

Esempio. Quanti anagrammi possiamo scrivere utilizzando le lettere della parola $ROMA$?

Per anagrammi indichiamo un qualsiasi allineamento delle lettere di tale parola, anche privi di significato. Quindi sono anagrammi della parola assegnata sia $ORMA$ che $OARM$.

La prima lettera può essere scelta in 4 modi diversi; la seconda, scelta la prima, in tre modi; la terza, scelte le prime due, in due modi distinti; mentre, dopo aver effettuato queste scelte, l'ultima lettera potrà essere scelta in un unico modo.

Riassumendo otteniamo quanto segue:

lettera	1°	2°	3°	4°
scelte	4	3	2	1

Il numero complessivo di anagrammi che si possono scrivere è pari a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ (che si legge 4 fattoriale). Quindi il numero degli anagrammi che si possono scrivere con le lettere di tale parola sono in totale 24.

Notiamo alcune cose importanti: in questo caso abbiamo determinato quanti allineamenti distinti si possono scrivere prendendo una ed una sola volta tutti gli elementi di un dato insieme; gli elementi dell'insieme iniziale sono distinti.

Ogni qual volta sono soddisfatte le condizioni indicate: ricerca del numero dei possibili allineamenti di n oggetti distinti, presi tutti simultaneamente, parleremo di **PERMUTAZIONI** di n elementi distinti. Ragionando come fatto in precedenza possiamo dire che:

$$P_n = n!.$$

Esempio. Quanti sono gli anagrammi che si possono ottenere utilizzando le lettere della parola $OLIMPIADI$?

In questo caso notiamo che le lettere che compongono la parola sono 9, ma immediatamente notiamo che compaiono 3 lettere uguali, le tre I. Gli anagrammi quindi non sono $9! = 362.880$, come potremmo inizialmente supporre, ma un numero inferiore dato che se si effettua una permutazione delle sole lettere ripetute, il risultato finale non cambia.

Per meglio comprendere cosa succede in questo caso possiamo individuare le tre I colorandole in modo diverso:

$$OL{\color{red}I}MP{\color{green}I}AD{\color{blue}I},$$

un possibile anagramma si può ottenere scambiando solamente le lettere I nel modo seguente:

$$OLIMPIADI$$

quindi, fissato un anagramma, se permutiamo solamente le lettere che si ripetono otteniamo nuovamente l'anagramma iniziale. In questo caso, dato che le lettere ripetute sono le 3 I possiamo concludere che dato un qualsiasi anagramma, ne esistono altri $3! = 6$ che coincidono. Se vogliamo determinare il numero degli anagrammi distinti dobbiamo dividere il numero massimo di anagrammi per il numero prima calcolato.

In questo caso otteniamo che il numero degli anagrammi della parola assegnata è pari a:

$$P_9^{(3)} = \frac{9!}{3!} = 60.480.$$

Se dobbiamo calcolare il numero di permutazioni di n oggetti, dove ne compaiono $r_1,\ r_2, \cdots, r_k$ ripetuti, tale numero è pari a:

$$P_n^{(r_1,\, r_2, \cdots, r_k)} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}.$$

Esempio. Calcolare il numero di anagrammi che si possono formare utilizzando le lettere della parola: $ASSETATO$.

In questo caso abbiamo una parola formata da 8 lettere, sono presenti 2 A, 2 S e e 2 T. Per calcolare il numero richiesto dobbiamo determinare:

$$P_8^{(2,2,2)} = \frac{8!}{2!2!2!} = 6720.$$

Attenzione! Bisogna prestare attenzione alle operazioni con i numeri prima definiti. Non vale ad esempio quanto segue:

$$\frac{8!}{2!} = 4! = 24.$$

Invece si può calcolare il numero precedente nel seguente modo, ricordando che $n! = n \cdot (n-1)!$,

$$\frac{8!}{2!} = \frac{8 \cdot 7!}{2} = 4 \cdot 7! = 2520.$$

Esercizio. Quanti numeri di 5 cifre si possono scrivere utilizzando le cifre del numero 12345?

Esercizio. Quanti numeri di 10 cifre si possono scrivere utilizzando tutte le cifre arabe?

Esercizio. Quanti anagrammi si possono scrivere utilizzando le lettere della parola $ISCRIZIONE$? Quanti di questi anagrammi terminano con le lettere $ZIONE$ in questo ordine?

Analizziamo ora un nuovo problema:

Esempio. Sappiamo che la combinazione di una cassaforte contiene le cifre: 1, 2, 3, 4, 5, e che tali cifre non sono ripetute nella combinazione che apre la cassaforte. Vogliamo determinare quante sono le possibili combinazioni diverse che dobbiamo provare per essere certi di inserire quella corretta.

In questo caso non possiamo parlare di permutazioni in quanto dei cinque elementi che possono costituire la combinazione cercata, ne dobbiamo utilizzare solo 3. Notiamo anche che due allineamenti, combinazioni della cassaforte, sono distinti se o contengono numeri distinti oppure contengono gli stessi numeri in ordine diverso (ad esempio sono distinte le combinazioni: 123 e 124, perché contengono almeno un elemento diverso; e 123 e 321, perché contengono gli stessi elementi in ordine diverso). Questi allineamenti vengono detti **DISPOSIZIONI** semplici di n elementi di classe k e si indicano con $D_{n,k}$.

Operiamo come abbiamo fatto in precedenza per determinare il numero delle permutazioni: la prima scelta può essere fatta in 5 modi diversi, la seconda in 4 modi diversi e l'ultima in 3 modi diversi. Otteniamo quindi che il numero cercato è pari a:

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

In generale vale la seguente regola per il calcolo delle disposizioni di n di classe k:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{k!}.$$

Esercizio. Quanti numeri di tre cifre distinte si possono scrivere utilizzando le cifre arabe?

Esercizio. Si vogliono disporre 10 libri su due ripiani, ognuno dei ripiani può contenere 5 libri. In quanti modi si può effettuare questa operazione?

Esercizio. Quattro amici vanno a teatro e si devono sedere su quattro poltrone. In quanti modi diversi si possono disporre? Se tre delle poltrone sono vicine e la quarta invece risulta non adiacente alle precedenti, determinare in quanti modi si possono sedere.

Ancora un esempio per parlare di qualcosa di nuovo:

Esempio. Quante sono le schedine che si possono giocare al totocalcio? (consideriamo la schedina formata da 13 pronostici)

Notiamo che i pronostici possono essere tre: 1, 2 e x. Ognuno di tali valori può essere assegnato ad uno qualsiasi dei risultati delle partite; se consideriamo due colonne queste sono diverse non se contengono elementi diversi (possiamo scegliere solo tra tre simboli per completare 13 posizioni), ma si distingueranno o se contengono un numero diverso di 1, di 2 o di x; oppure contengono lo stesso numero di simboli, ma in un ordine diverso.

In questo caso parliamo ancora di disposizioni, ma con ripetizione. La prima scelta può essere effettuata in 3 modi diversi e così tutte le scelte successive. Il numero complessivo di schedine che si possono giocare diventa quindi pari a:

$$3^{13} = 1.594.323,$$

numero che risulta considerevole!

In generale il numero di disposizioni con ripetizioni è pari a:

$$D_{n,k} = n^k.$$

Esercizio. Quanti numeri di 3 cifre, anche ripetute, si possono scrivere utilizzando le cifre: 1, 2, 3, 4, 5?

Esercizio. Quanti numeri di 4 cifre, anche ripetute, si possono scrivere utilizzando le 10 cifre arabe?

Esercizio. Qual è il numero complessivo che delle targhe automobilistiche che si possono scrivere con l'attuale sistema? *Nota. Si possono utilizzare tutte le lettere dell'alfabeto inglese tranne: I, O, Q, U.*

Esercizio. Sia S l'insieme dei numeri interi positivi minori o uguali a 50. Quanti sottoinsiemi di S soddisfano le seguenti condizioni:

- contengono solo 10 elementi;
- 3 di questi elementi sono numeri pari.

Altro problema che permette di introdurre un nuovo metodo per effettuare i calcoli è il seguente:

Esempio. Una classe è composta da 25 alunni, si devono eleggere i rappresentanti di classe. Quante coppie di rappresentanti possono essere scelte?

Non possiamo utilizzare la formula prima richiamata per il calcolo delle disposizioni, semplici o con ripetizione, in quanto due possibili coppie differiscono solamente per gli elementi contenuti e non per l'ordine con il quale vengono indicati. In questo caso parleremo di **COMBINAZIONI** semplici di n di classe k. Le disposizioni differiscono l'una dall'altra solo per gli elementi che sono contenuti e non per l'ordine. Il numero di questi allineamenti può essere calcolato nel seguente modo:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k},$$

questa formula può essere dedotta nel seguente modo: il numero complessivo di allineamenti che contengono k tra gli n elementi assegnati è pari al numero al numero delle disposizioni di n elementi di classe k; fissato un allineamento qualsiasi possiamo dire che permutando gli elementi di tale allineamento otteniamo una nuova disposizione, che, vista quale combinazione, coincide con la precedente. Utilizzando tale osservazione possiamo dire che un determinato allineamento questo si ripete tra le disposizioni esattamente P_k volte. Quindi per determinare il numero delle combinazioni di n oggetti di classe k possiamo dividere il numero delle disposizioni di n oggetti di classe k per il numero delle permutazioni di k elementi, numero delle disposizioni che differiscono solo per l'ordine, ma non per gli elementi.

Il numero $C_{n,k}$ si può calcolare nel seguente modo:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

che si indica anche con il seguente simbolo: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$, che viene detto coefficiente binomiale e si legge nel seguente modo *n su k*.

Ricordiamo alcune proprietà del coefficiente binomiale:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)$$

Esercizio. Si dispone di 10 liquori con i quali si vogliono preparare dei drink prendendo tre liquori distinti in parti uguali. Qual è il numero di drink che si possono preparare?

Quale ultimo problema consideriamo il seguente:

Esempio. Qual è il numero massimo di termini che può comparire in un polinomio omogeneo di quarto grado in tre variabili x, y, z?

Un polinomio di terzo grado è omogeneo se contiene solo monomi di grado tre, quindi ogni monomio potrà essere del tipo $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ con $\alpha + \beta + \gamma = 4$. Ad ogni monomio può essere associata una quaterna del tipo (α, β, γ) formata da numeri tutti non negativi aventi per somma 4. Un altro modo per indicare una tale terna può essere il seguente: indichiamo con $*$ gli elementi che dobbiamo determinare, in questo caso $****$; con $|$ indichiamo degli elementi di separazione che servono ad individuare quanti tra i vari elementi sono del primo tipo, quanti del secondo e del terzo. Ad esempio possiamo rappresentare il monomio x^3z, utilizzando il primo metodo tramite la quaterna $(3, 0, 1)$, oppure nel seguente modo $***||*$. In questo caso abbiamo quattro simboli di questo tipo $*$ (classe della permutazione) e due simboli $|$ (numero degli elementi che abbiamo a disposizione -1).

Il problema quindi può essere trasformato nel seguente modo: quante sono le permutazioni della stringa di caratteri $* * * * ||$? Tale numero è pari a:

$$C'_{3,4} = \frac{P_6}{P_2 P_4} = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 4 \end{array} \right) = 30.$$

Quindi un polinomio omogeneo di quarto grado in tre variabili può contenere al più 30 termini diversi.

Gli ultimi allineamenti scritti si chiamano combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k. Utilizzando il procedimento prima indicato possiamo dire che il numero di simboli da permutare è pari a $n + k - 1$ tra questi simboli $n - 1$ sono ripetuti (sono gli elementi di separazione $|$). e k elementi ripetuti (sono gli elementi prima indicati con $*$. Il numero complessivo di questi allineamenti è pari a:

$$C'_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right).$$

Alcuni esercizi trovati in rete:

1. Determinare il numero N in cui si possono disporre 8 canottieri in un'imbarcazione da regata, tenendo conto che i due più forti devono andare nè al primo nè all'ultimo posto.
2. Due persone possiedono 3 giacche, 4 paia di pantaloni, 5 cappelli. Determinare il numero N di modi diversi in cui si possono vestire.
3. In una stanza sono presenti 12 persone nate tutte in mesi diversi; determinare il numero N_1 di modi possibili di sceglierne due nate entrambe nella stessa stagione ed il numero N_2 di modi possibili di sceglierne tre nate tutte in stagioni diverse.
4. Determinare quanti sono i numeri di quattro cifre che contengono sia il numero 1 sia il numero 2, ciascuno una sola volta, e che non contengono lo 0.
5. Quante sono le mani che si possono giocare a bridge? *Una mano a bridge si ottiene dividendo tutte le 52 carte di un mazzo di carte francesi tra quattro persone.*
6. Si devono disporre 10 persone attorno ad un tavolo rotondo, quanti diversi modi di disposizione sono possibili?
7. Quanti sono i numeri naturali di 4 cifre distinte che si possono formare con le 10 cifre arabe?
8. Quanti sono i numeri interi pari formati da 4 cifre distinte che si possono scrivere utilizzando le 10 cifre arabe?
9. Quanti sono i possibili: ambi, terne, quaterne e cinquine che si possono ottenere estraendo, senza reimmissione, rispettivamente 2, 3, 4 o 5 palline da un'urna che ne contiene 90?
10. Si devono disporre 20 palline identiche in 3 scatole indistinguibili (eventualmente alla fine della sistemazione una oppure due scatole possono risultare vuote). In quanti modi diversi si può effettuare questa suddivisione?
11. Determinare il numero di anagrammi della parola $FENICOTTERO$. Determinare quanti di questi anagrammi iniziano per $FENI$ e quanti terminino per RO?

Riporto nel seguito un utile principio che potrebbe essere utile per alcuni calcoli.

Principio di inclusione-esclusione. Siano $A_1, A_2, \dots, A_k$, k insiemi non necessariamente disgiunti, allora vale la seguente uguaglianza:

$$|\cup A_k| = \sum_1^k |A_k| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_h| + \dots.$$

La cardinalità dell'unione degli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_k$ è pari alla somma delle cardinalità dei singoli insiemi, meno la somma delle cardinalità delle intersezioni di tutte le coppie di insiemi, più la somma delle cardinalità delle intersezioni di tutte le terne di insiemi, e così via. Ovvero si devono calcolare la somma delle cardinalità di tutte le intersezioni di un numero dispari di insiemi, e sottrarre la somma delle cardinalità di tutte le intersezioni che si ottengono prendendo un numero pari di insiemi.

Esempio. In una classe formata da 25 studenti 14 giocano a calcio e 13 giocano a tennis. Quanti sono gli alunni che giocano sia a calcio che a tennis, sapendo che ognuno degli studenti pratica almeno uno sport?

Indichiamo con A l'insieme degli studenti che praticano il calcio e con B il numero degli studenti che giocano a tennis. Risulta per il principio di inclusione esclusione:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \, 25 = 14 + 13 - |A \cap B|,$$

dall'ultima relazione possiamo concludere che $|A \cap B| = 2$.