Flanders Mathematics Olympiad 1993-1994: First Round

1. Quanti possibili valori distinti può assumere c, se c è una soluzione del sistema di equazioni:
$$\begin{cases} a+b & = c^2 d \\ a+b+c & = 42 \end{cases}$$
con a, b, c, $d \in \mathbb{N}$?

   (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8 (E) infiniti

2. Un veicolo viaggia sulla strada che congiunge A con E. Le distanze tra le città AB, BC, CD e DE sono uguali e le velocità di percorrenza sono le seguenti: AB velocità 80 km/u, BC velocità 120 km/u, CD velocità 90 km/u, DE velocità 110 km/u.

   Se V è la velocità media in km/h di percorrenza del tratto AC e W è la velocità media di percorrenza del tratto CE, allora

   (A) $V < W < 100$ (B) $V = W = 100$ (C) $100 < V < leqW$
   (D) $W \leq V < 100$ (E) $100 < W < V$

3. Due cerchi di raggio 1 sono tangenti in un punto P. Un terzo cerchio passa per i punti A, B e C, con A estremo del diametro PA del primo cerchio, e B e C estremi del diametro del secondo cerchio perpendicolare ad AP. Il raggio del terzo cerchio è:

   (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 2

4. Per quanti numeri reali r l'equazione:
$$x^{-}(r+1)x^2 + r = 0$$
nell'indeterminata x ha 4 soluzioni reali differenti che costituiscono i termini di una progressione aritmetica?

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) infiniti valori

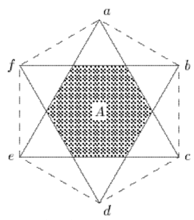
5. Ogni faccia di un cubo è colorata con un colore diverso (vengono utilizzati sei colori diversi). In quanti modi diversi tale colorazione può essere fatta? Diremo che due colorazioni sono la stessa se una può essere trasformata nell'altra da una rotazione del cubo.

   (A) 30 (B) 60 (C) 120 (D) 360 (E) 720

6. Definiamo $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Per esempio $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. sia k il più piccolo valore diverso da 0 tale che $k!$ è divisibile per 1000. La somma delle cifre di k è:

   (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6 (E) 7

7. Due triangoli equilateri congruenti ACE e BDF sono disposti simmetricamente rispetto al loro centro comune. Se indichiamo con H l'esagono comune, i cui vertici sono i punti di intersezione dei lati dei due triangoli, e con K è l'esagono $ABCDEF$, allora il rapporto $\dfrac{area(K)}{area(H)}$ è:

   (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) 3 (D) $2\sqrt{3}$ (E) 4

8. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definita nel seguente modo: $f(x) = \lfloor 3 \sin x \rfloor$, dove $\lfloor a \rfloor$ indica il più grande intero minore o uguale ad a. Per esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

   Il grafico di f ha un certo numero di *punti isolati*. Tale numero è:

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 7

9. Ogni anno una scuola organizza un concorso. Quattro partecipanti Anna, Bart, Carla, David e Edna, conoscono la loro posizione in graduatoria. Ognuno di loro conosce la sua posizione (non ci sono ex-aequo). Carla sa che David si è posizionato due posti prima di Anna. Dato che lei pensa che Edna non può aver vinto il concorso (ed ha ragione), è in grado di ricostruire l'intera graduatoria. Qual è la posizione di Carla nella graduatoria?

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

10. Un libro ha n pagine, numerate da 1 a n. Il numero 1 appare 213 volte tra questi numeri. Quante pagine avrà tale libro?

    (A) 517 (B) 518 (C) $519 \le n \le 520$
    (D) $521 \le n \le 530$ (E) $531 \le n \le 540$