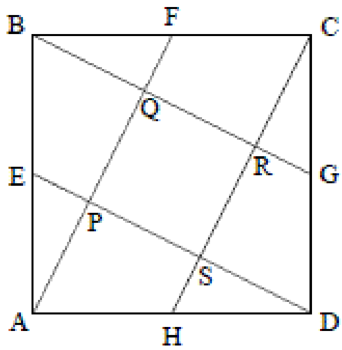
Olimpiadi della mateamtica
Varese

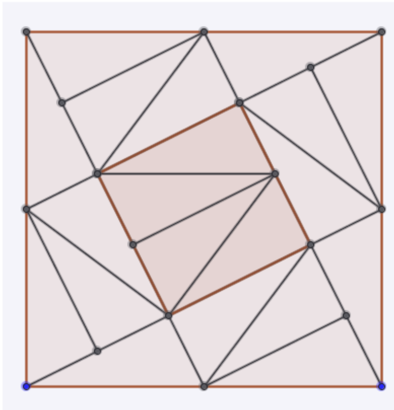
Il problema della settimana

1. Il quadrilatero $ABCD$ in figura è un quadrato di lato 1, e i punti E, F, G e H sono i punti medi dei suoi lati. Determinare l'area del quadrilatero $PQRS$.



Riporto nel seguito solo un suggerimento per ottenere la soluzione.

Il quadrato iniziale può essere scomposto nell'unione di triangoli rettangoli congruenti come in figura, quindi l'area del quadrato piccolo è pari a $\frac{1}{5}$ dell'area del quadrato grande, quindi l'area del quadratino è pari a $\frac{1}{5}$.



2. Determinare tutti i possibili valori $x + \frac{1}{x}$ per i quali x è soluzione dell'equazione:

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$$

e risolvere quindi l'equazione.

Se si prova a risolvere l'equazione indicata utilizzando il teorema di Ruffini, si scopre che l'unica soluzione che si può eventualmente determinare è il valore $x = 1$, che, purtroppo non è soluzione. Quanto viene indicato nel testo del problema è un possibile metodo per risolvere equazioni di questo tipo, che vengono dette equazioni reciproche, in quanto se x è soluzione, risulta soluzione dell'equazione anche $\frac{1}{x}$.

Iniziamo con il notare che $x = 0$ non è soluzione dell'equazione, quindi possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per x^2 ottenendo in questo modo l'equazione:

$$x^2 + 5x - 4 + 5\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Notiamo ora che tale equazione può essere utilmente riscritta nel seguente modo:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0,$$

effettuiamo la sostituzione $t = \left(x + \frac{1}{x}\right)$, così otteniamo l'equazione: $t^2 + 5t - 6 = 0$, che si risolve facilmente ottenendo le due soluzioni: $t_1 = -6$ e $t_2 = 1$.

Risostituendo otteniamo le due equazioni: $x + \frac{1}{x} = -6$, che ammette le soluzioni: $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$; $x + \frac{1}{x} = 1$, che ammette le due soluzioni complesse: $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.